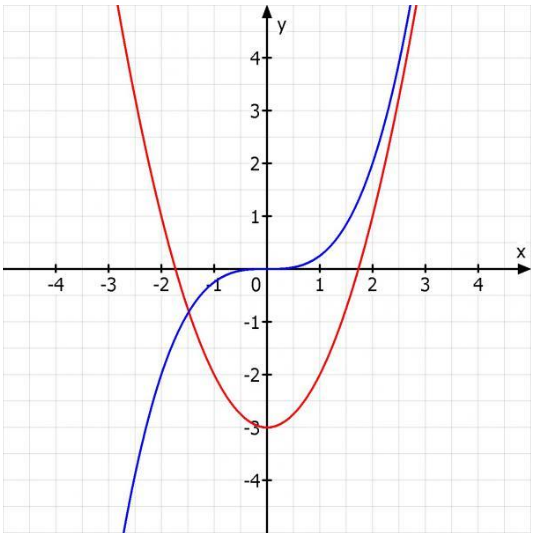
Symmetrie von Graphen

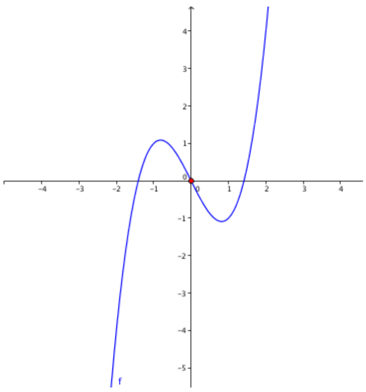
Graphen von Funktionen können **achsensymmetrisch zur y-Achse** oder **punktsymmetrisch zum Ursprung** sein.

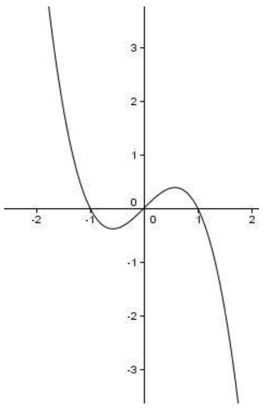


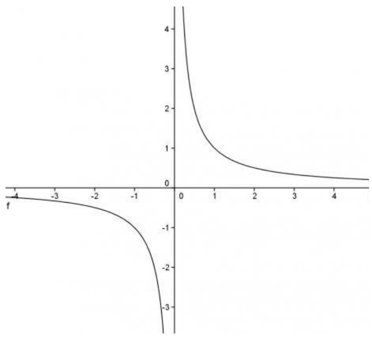
Aufgabe 1:
Welcher Graph ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**?
Welcher Graph ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**?
Welchen Grad haben die beiden Funktionen?

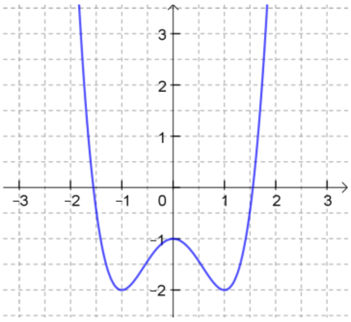
Aufgabe 2:
Beurteile jeweils, ob die folgenden Funktionsgraphen

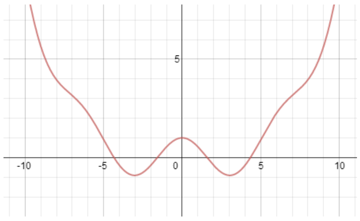
- achsensymmetrisch zur y-Achse sind,
- punktsymmetrisch zum Ursprung sind,
- keine Symmetrie aufweisen.

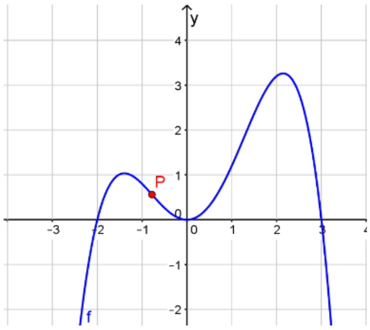


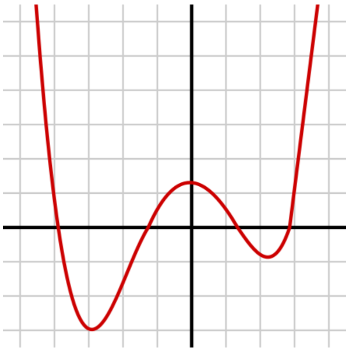


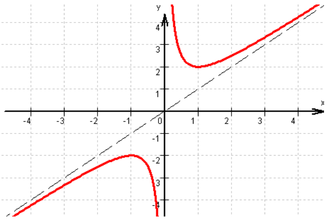


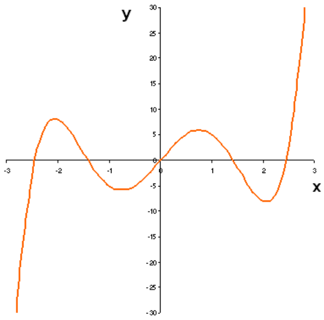


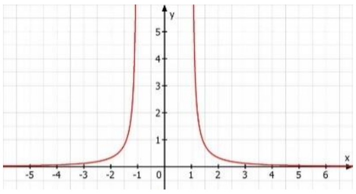


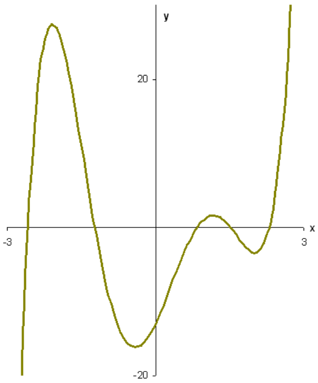

y
P
f

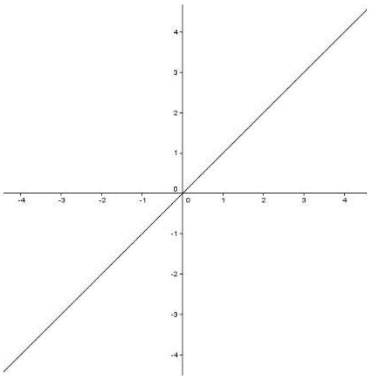


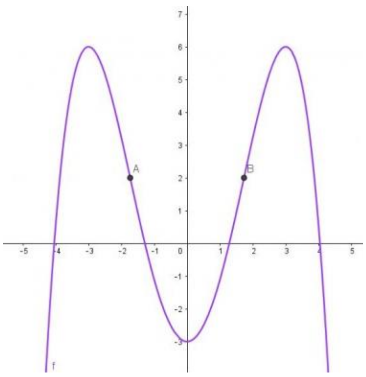


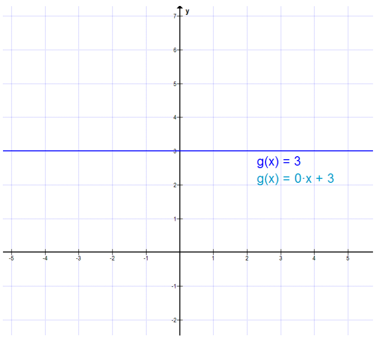

y
x

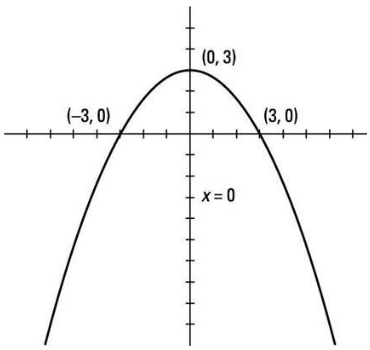


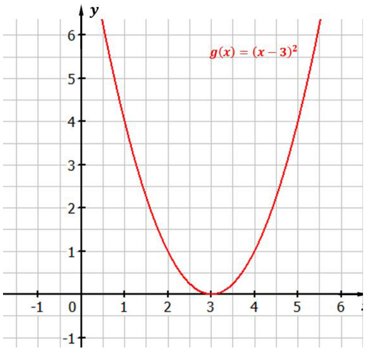

y
x

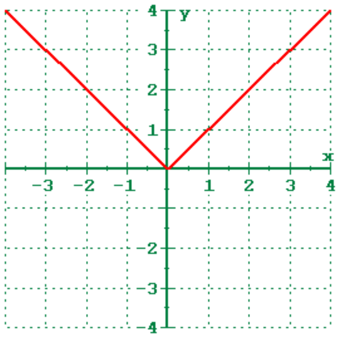


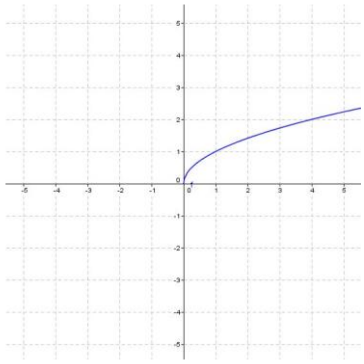

A
B

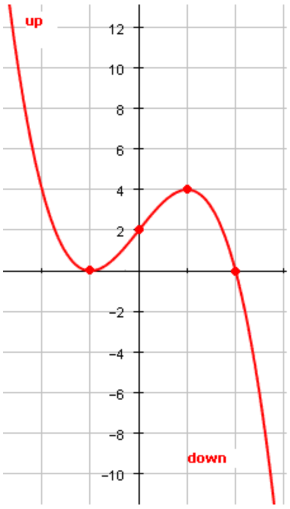

g(x) = 3
g(x) = 0·x + 3

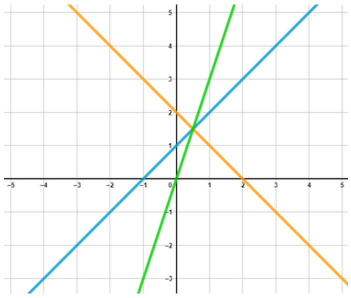

(0, 3)
(−3, 0)
(3, 0)
x = 0

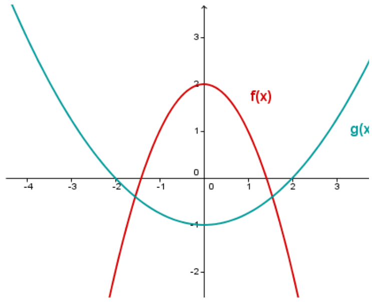


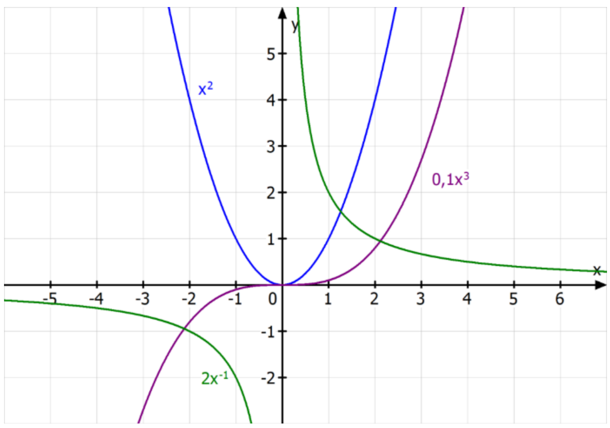


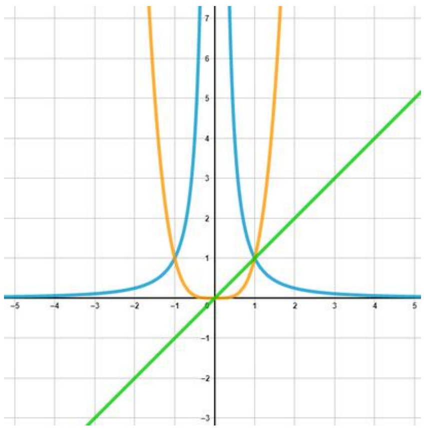












Aufgabe 3:
Schau die die Graphen der ganzrationalen Funktionen an (kein x in der Wurzel oder im Nenner). Welchen Zusammenhang kann man bei solchen Funktionen zwischen dem Grad der Funktion und der Symmetrie ihres Graphen erkennen?

Der Graph einer beliebigen Funktion f ist genau dann
- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: **f (– x) = f (x)** Wenn sich beim x die Vorzeichen umdrehen, drehen sie sich beim y nicht um.
- **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: **f (– x) = – f (x)** Wenn sich beim x die Vorzeichen umdrehen, dann drehen sie sich auch beim y um.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann
- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn **alle** Hochzahlen der x-Potenzen gerade sind
- **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn **alle** Hochzahlen der x-Potenzen ungerade sind.

Definition einer ganzrationalen Funktion:
Eine Funktion f der Form
$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$
mit $D_f = \mathbb{R}$ heißt **ganzrationale Funktion vom Grad n**
($n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$).
Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen Koeffizienten von f.

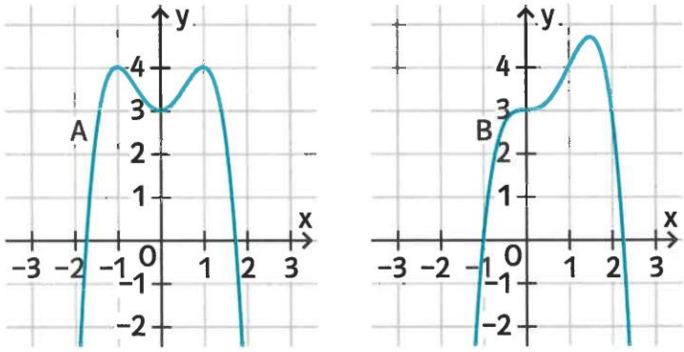
Buch Seite 21 Beispiel 1 **Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen**
Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f **achsensymmetrisch zur y-Achse** oder **punktsymmetrisch zum Ursprung** ist.

a) $f(x) = 3x^4 - 17^3x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{2}\, x^3 + x$

c) $f(x) = -x^3 + 5x + 7$

Buch Seite 21 Beispiel 2 **Symmetrie und Verhalten für x → ± ∞**
Welche der Funktionen f, g, h oder i gehört zum Graphen A, welche zum Graphen B? Begründen Sie.



$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

$g(x) = -x^4 + 2x^3 + 3$

$h(x) = x^4 + 4x^3 + 3$

$i(x) = -x^5 + 4x^3 + 3x$

Buch Seite 21 Beispiel 3 **Auf Symmetrie untersuchen**
Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Buch Seite 21 Beispiel 1 **Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen**

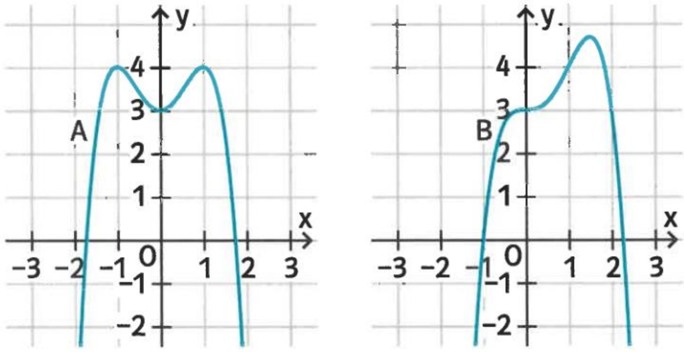
Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f **achsensymmetrisch zur y-Achse** oder **punktsymmetrisch zum Ursprung** ist.

d) $f(x) = 3x^4 - 17^3x^2 - 1$
Die Funktion hat nur gerade Hochzahlen. Somit ist sie achsensymmetrisch zur y-Achse.

e) $f(x) = \sqrt{2}\,x^3 + x$
Die Funktion hat nur ungerade Hochzahlen. Somit ist sie punktsymmetrisch zum Ursprung.

f) $f(x) = -x^3 + 5x + 7$
Die Funktion hat gerade und ungerade Hochzahlen. Somit ist sie weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

Buch Seite 21 Beispiel 2 **Symmetrie und Verhalten für x → ± ∞**
Welche der Funktionen f, g, h oder i gehört zum Graphen A, welche zum Graphen B? Begründen Sie.



$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ $g(x) = -x^4 + 2x^3 + 3$

$h(x) = x^4 + 4x^3 + 3$ $i(x) = -x^5 + 4x^3 + 3x$

Lösung:

(1) Der Graph A ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Somit muss ihm eine Funktionsgleichung zugeordnet werden, die nur gerade Hochzahlen besitzt. Dies ist f (x).
Zum Graphen A gehört die Funktion f. Begründung: f ist die einzige Funktion, deren Graph wie A achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

(2) Der Graph von B ist nicht symmetrisch. Deshalb brauchen wir eine Mischung aus geraden und ungeraden Hochzahlen. Die haben wir bei g und h. Da die y-Werte jeweils ins negative Unendliche streben, also eine Spiegelung vorliegt, muss unser a negativ sein. Deshalb kann nur g die Lösung sein.
Zum Graphen B gehört die Funktion g. Begründung: g ist die einzige Funktion mit geraden und ungeraden Hochzahlen, bei der g (x) → – ∞ für x → ± ∞ gilt.

Buch Seite 21 Beispiel 3 **Auf Symmetrie untersuchen**
Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Lösung:
Hier haben wir keine ganzrationale Funktion. Deshalb können wir uns nicht an den Hochzahlen orientieren, sondern müssen schauen, ob sich beim Umkehren des Vorzeichens von x auch das Vorzeichen von y umdreht, oder nicht.

Der Nenner hat immer positive Werte. Der Zähler ist für positive x positiv und für negative x negativ. Somit haben wir eine Punktsymmetrie zum Ursprung.

$$\mathbf{f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1}}$$