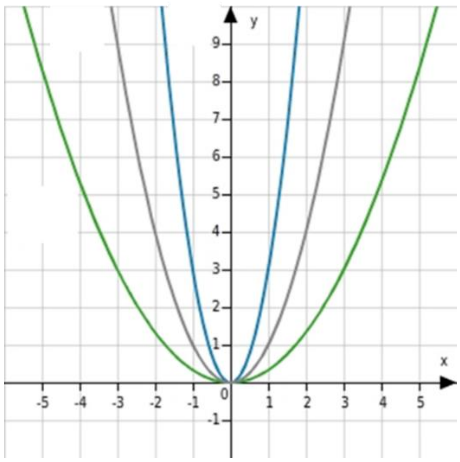
Strecken von Graphen

Streckungen bitte immer nur in y-Richtung angeben
Das Wort „stauchen“ möglichst vermeiden, stattdessen den Begriff „strecken“ verwenden, auch wenn er bei breiten Kurven nicht so anschaulich ist.

- Bei einer Streckung, die einen Faktor a hat, dessen Betrag größer als 1 ist, wird die Kurve schmäler.
- Bei einer Streckung, die einen Faktor a hat, dessen Betrag kleiner als 1 ist, wird die Kurve breiter.



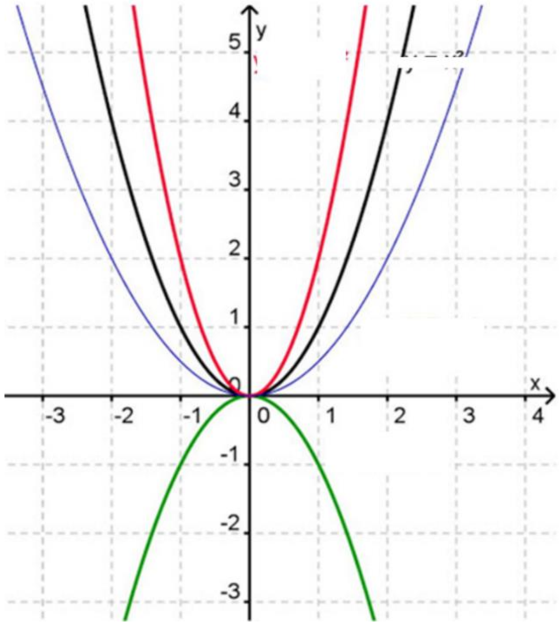
Aufgabenstellung:
Wie erhält man aus dem Graphen von f mit f (x) = x^2 (grau) den Graphen der Funktion g (blaugrün) und den Graphen der Funktion h (grün)? Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

Lösungen:

blau:
Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung (sieht man am Punkt (1|3)
g (x) = $3x^2$

grau:
Normalparabel: Streckung mit dem Faktor 1 in y-Richtung
f (x) = x^2

grün:
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in y-Richtung (sieht man am Punkt (3|3))
h (x) = $\frac{1}{3}x^2$



Wie erhält man aus dem Graphen von f mit f (x) = x^2 (schwarz) die Graphen der Funktionen g (rot), h (violett) und i (grün)? Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

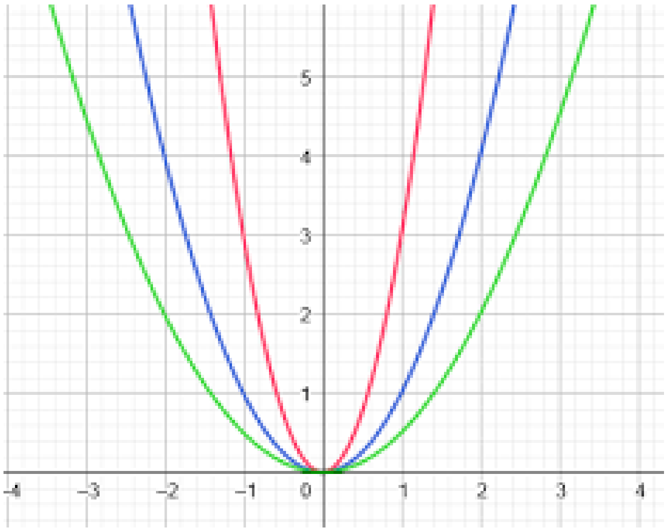
Lösungen:

schwarz:
Normalparabel: Streckung mit dem Faktor 1 in y-Richtung
f (x) = x^2

rot:
Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung
g (x) = $2x^2$

violett:
Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung
h (x) = 0,5 x^2

grün:
gespiegelte Normalparabel: Streckung mit dem Faktor – 1 in y-Richtung
oder: an der x-Achse gespiegelte Normalparabel
i (x) = – x^2



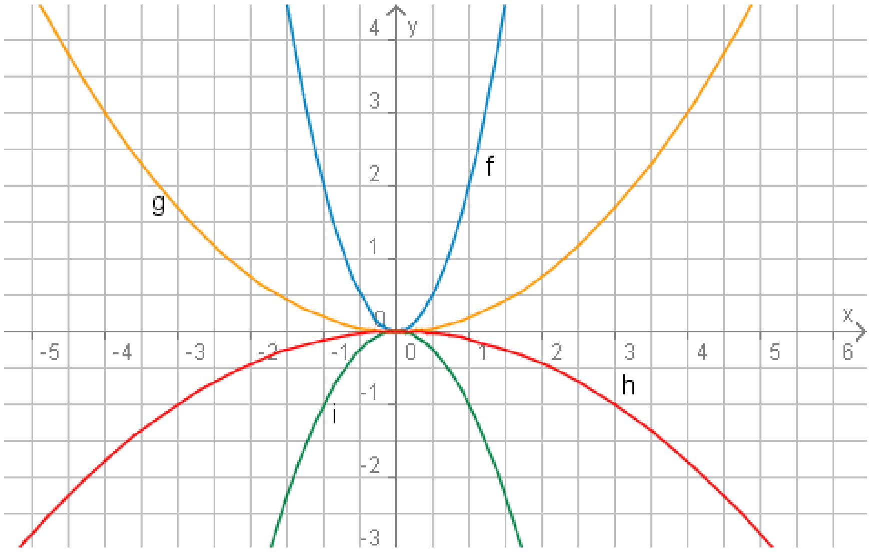
Wie erhält man aus dem Graphen von f mit f (x) = x^2 (blau) den Graphen der Funktion g (rot) und den Graphen der Funktion h (grün)? Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

Lösungen:

blau:
Normalparabel: Streckung mit dem Faktor 1 in y-Richtung
f (x) = x^2

rot:
Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung
g (x) = $3x^2$

grün:
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung
h (x) = $\frac{1}{2}x^2$



Beschreiben Sie, wie man die Graphen der Funktionen f, i und h aus dem Graphen der Funktion k mit k (x) = x^2 erhält, und geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

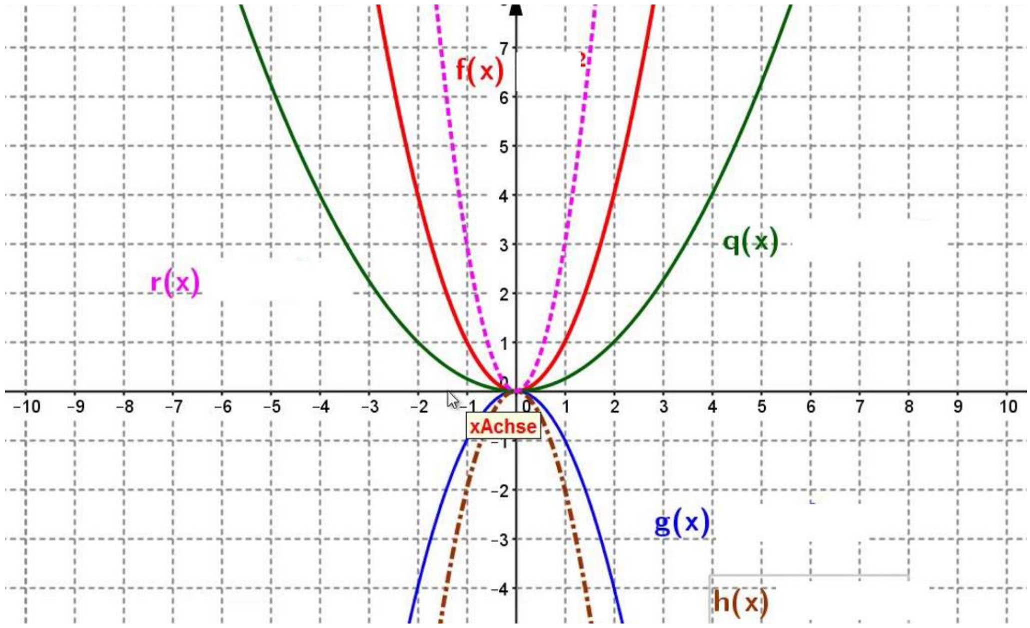
<u>Lösung:</u>

hellblau:
Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung
f (x) = $2x^2$

grün:
gespiegelte Normalparabel: Streckung mit dem Faktor – 1 in y-Richtung
i (x) = – x^2

rot:
Streckung mit dem Faktor $-\frac{1}{9}$ in y-Richtung (den Punkt (3|– 1) anschauen)
Wie oft passt die 1 in die 9? 9 mal
h (x) = $-\frac{1}{9}x^2$

sehr schwer:
gelb:
nur der Punkt P (4|3) deutlich
Bei x = 4 wäre ich eigentlich bei y = 16. Ich bin aber erst bei 3.
Die 3 passt $5\frac{1}{3}$ mal in die 16
Ich habe also $\frac{1}{5{,}\overline{3}}$ meines normalen y-Wertes.
Diesen Bruch erweitere ich so, dass ich keine Kommazahl mehr habe, also mit 3:
Streckung mit dem Faktor $\frac{3}{16}$ in y-Richtung
g (x) = $\frac{3}{16}x^2$



Beschreiben Sie, wie man die Graphen der Funktionen g, h, q und r aus dem Graphen der Funktion f mit f (x) = x^2 erhält, und geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

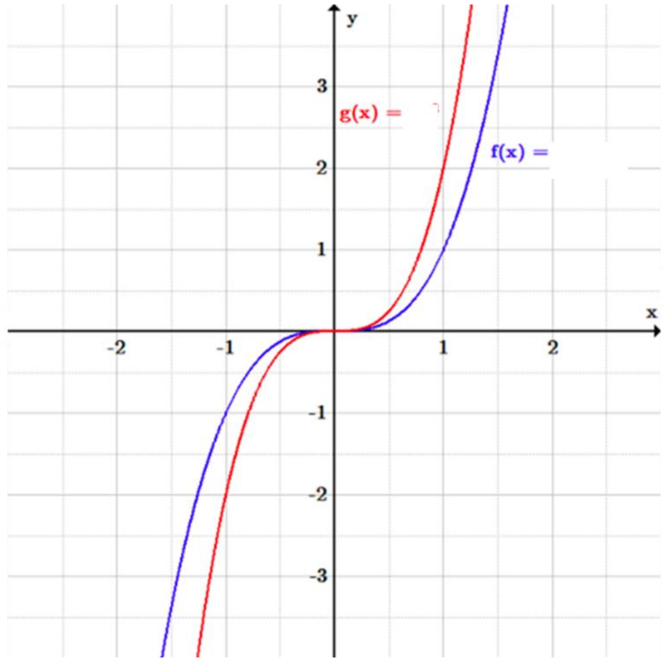
<u>Lösungen:</u>

blau:
gespiegelte Normalparabel: Streckung mit dem Faktor – 1 in y-Richtung
g (x) = – x^2

braun:
Streckung mit dem Faktor – 2 in y-Richtung
oder:
„… wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und dann an der x-Achse gespiegelt"
h (x) = – $2x^2$

grün:
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung
q (x) = $\frac{1}{4}x^2$

pink:
Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung
r (x) = $3x^2$

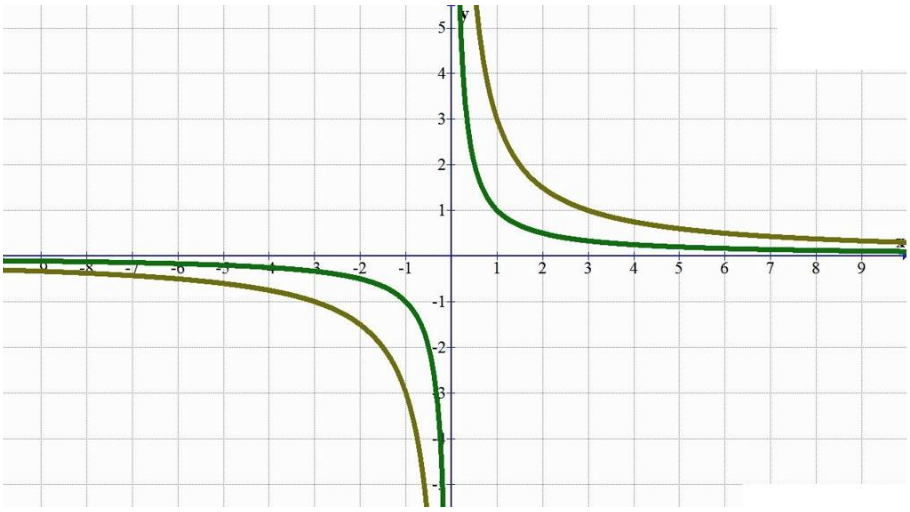


Bestimme die Funktionsterme der beiden Graphen vom Grad 3. Beschreibe die Streckungen.

<u>Lösungen:</u>

blau:
Streckung mit dem Faktor 1 in y-Richtung
f (x) = x^3

rot:
Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung
g (x) = $2x^3$



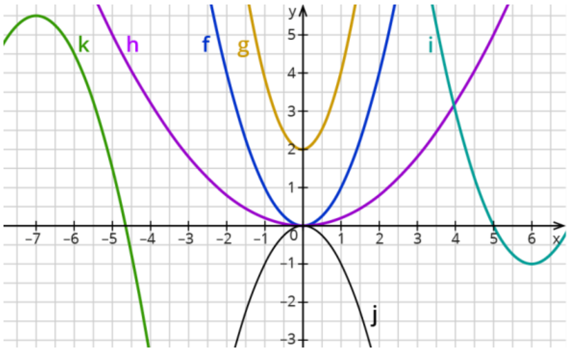
Der dunkelgrüne Graph gehört zur Funktion f mit f (x) = $\frac{1}{x}$. Bestimmen Sie den Funktionsterm der olivgrünen Funktion g und beschreiben Sie, wie man g aus f erhält.

<u>Lösung:</u>

g (x) = 3 · $\mathbf{\frac{1}{x} = \frac{3}{x}}$
Strecken mit dem Faktor 3 in y-Richtung

Strecken und Verschieben von Graphen

Erst strecken, dann spiegeln, dann verschieben!



Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Funktionen h, j, g, i und k aus dem Graphen der Funktion f mit f (x) = x^2 erhält, und geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.

Lösungen:

blau:
Normalparabel: Streckung mit dem Faktor 1 in y-Richtung
f (x) = x^2

violett:
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{5}$ in y-Richtung
h (x) = $\frac{1}{5}x^2$

schwarz:
gespiegelte Normalparabel: Streckung mit dem Faktor – 1 in y-Richtung
j (x) = $-x^2$

crèmefarben:
Der Graph ist mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um 2 in y-Richtung verschoben
g (x) = $2x^2 + 2$

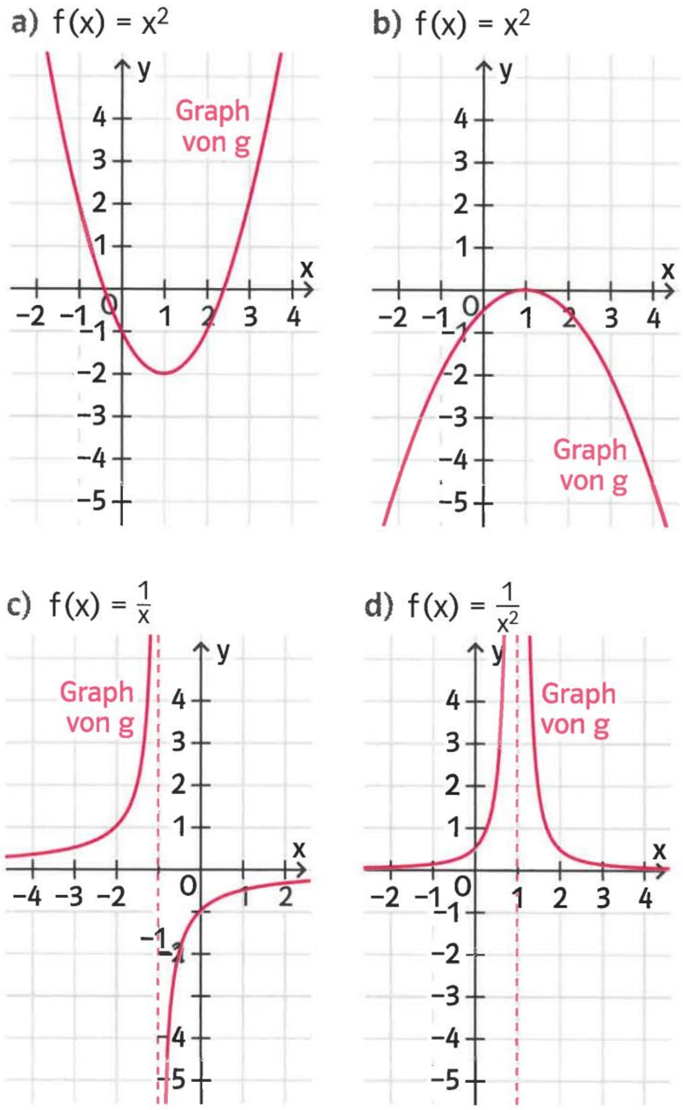
grün:
Der Graph ist um – 7 in x-Richtung und um 5,5 in y-Richtung verschoben.
k (x) = $-(x + 7)^2 + 5{,}5$

blaugrün:
Der Graph ist um 6 in x-Richtung und um – 1 in y-Richtung verschoben.
i (x) = $(x - 6)^2 - 1$

Ausgewählte Aufgaben aus dem Buch

◊ Buch Seite 12 Nr. 9

Beschreiben Sie jeweils, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f entsteht, und geben Sie einen Funktionsterm für g an.



<u>Lösungen:</u>

a) eigene Kommentare: Parabel: eins nach rechts, zwei runter:
   $g(x) = (x - 1)^2 - 2$
   Verschieben um 1 in x-Richtung und um – 2 in y-Richtung
   Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung um 1 Längeneinheit nach rechts parallel zur x- Achse (oder: „in x-Richtung“ oder „entlang der x-Achse“) und durch eine Verschiebung um 2 Längeneinheiten nach unten (oder: „um – 7 Längeneinheiten“) parallel zur y-Achse hervor.

b) eigene Kommentare: halb so hoch, gespiegelt und eins nach rechts:

$g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

Strecken mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ in y-Richtung und Verschieben um 1 in x-Richtung

c) eigene Kommentare: eins nach links und gespiegelt:

$g(x) = -\frac{1}{x+1}$

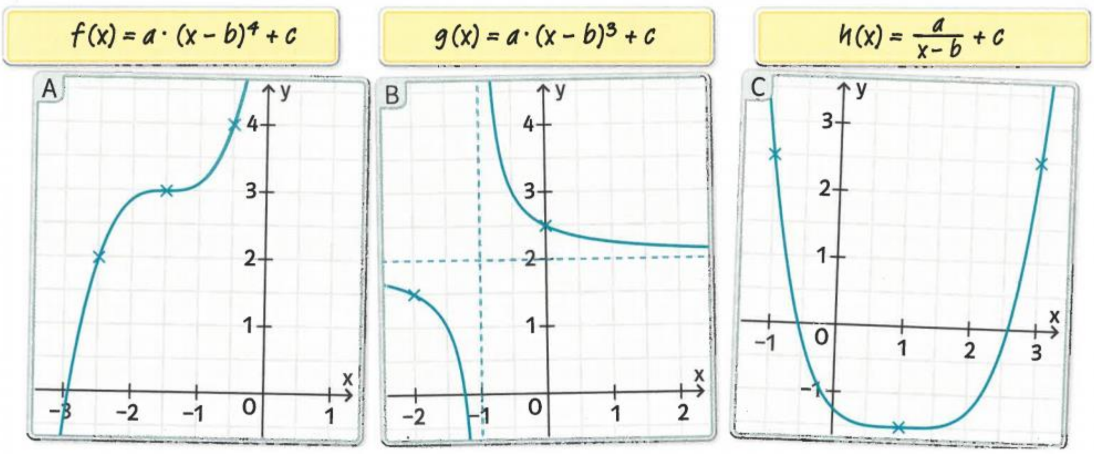
Strecken mit dem Faktor – 1 in y-Richtung und Verschieben um – 1 in x-Richtung

d) eigene Kommentare: eins nach rechts und die Hälfte, f (2) wäre eigentlich 1:

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$

Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung und Verschieben um 1 in x-Richtung

◊ Buch Seite 13 Nr. 10
Ordnen Sie die Graphen A, B und C den Funktionen f, g und h zu und bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b und c.



<u>Lösungen:</u>
Der Graph A gehört zur Funktion g. Es ist a = 1, b = – 1,5, c = 3 und $g(x) = (x + 1{,}5)^3 + 3$.
Der Graph B gehört zur Funktion h. Es ist a = 0,5, b = – 1, c = 2 und $h(x) = \frac{0{,}5}{x+1} + 2$.
Der Graph C gehört zur Funktion f. Es ist a = 0,25, b = 1, c = – 1,5 und $f(x) = 0{,}25 \cdot (x-1)^4 - 1{,}5$.

eigene Kommentare:
Jede Funktion wird mit den ersten Punkten ihrer Standardfunktion verglichen: mit x^3, $\frac{1}{x}$ und x^4

A gehört zu hoch 3:
$g(x) = a \cdot (x-b)^3 + c$

nach einer x-Einheit müsste die Kurve um 1 nach oben gegangen sein. Das tut sie. Somit keine Streckung.
1,5 nach links, 3 nach oben:

$g(x) = (x + 1{,}5)^3 + 3$

a = 1
b = – 1,5

B gehört zu dem Wurzelterm:
$h(x) = \frac{a}{x-b} + c$

1 nach links und 2 nach oben.
f (1) ist bei der Standardfunktion 1.
f (2) = 0,5
Hier wären, wenn ich die beiden Verschiebungen außer Acht lasse:
f (1) = 0,5
f (2) = 0,25

C gehört zu hoch 4:
„Badewanne“:
$f(x) = a \cdot (x-b)^4 + c$

nach 2 x-Einheiten müsste es eigentlich 16 nach oben gehen (2^4), es geht aber nur 4 nach oben, also ein Viertel vom „normalen“ Wert
ist 1 nach rechts verschoben und 1,5 nach unten:

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 - 1{,}5$

c = 3	also jeweils die Hälfte des „normalen“ Wertes. Daraus folgt: h (x) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$ + 2 oder: h (x) = $\frac{1}{2 \cdot (x+1)}$ + 2 oder: h (x) = $\frac{0,5}{x+1}$ + 2 a = 0,5 b = – 1 c = 2	a = $\frac{1}{4}$ b = 1 c = – 1,5

◊ Buch Seite 13 Nr. 12 Test
(ohne Taschenrechner) Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g in Fig. 1 aus dem Graphen der Funktion f entsteht, und geben Sie einen Funktionsterm von g an.

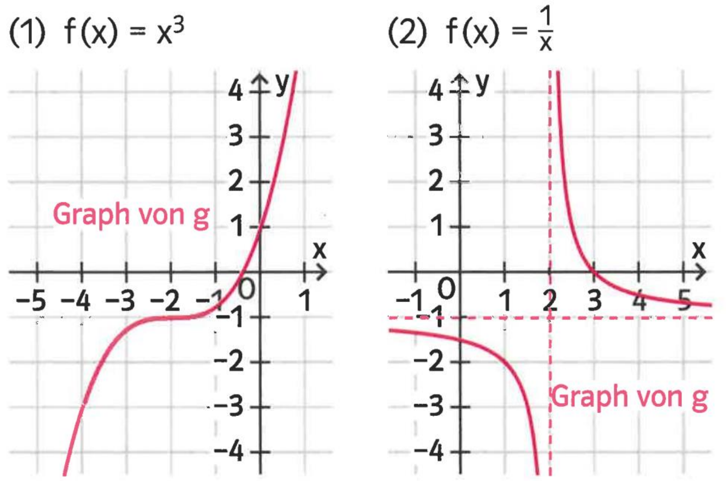


Fig. 1

Lösungen:

(1) eigene Kommentare: nach zwei x-Einheiten müsste y eigentlich bei der „Normal-x^3" 8 Einheiten hochgegangen sein, es sind aber nur 2, also ein Viertel davon, also Streckung von $\frac{1}{4}$.
Zusätzlich 2 links, 1 runter
$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^3 - 1$
Der Graph von f wird mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung gestreckt, um – 2 in x-Richtung verschoben und um – 1 in y-Richtung verschoben. Es ergibt sich
$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^3 - 1$

(2) eigene Kommentare: 2 nach rechts, 1 nach unten, keine Streckung:
$g(x) = \frac{1}{x-2} - 1$
Der Graph von f wird um 2 in x-Richtung verschoben und um – 1 in y-Richtung verschoben. Es ergibt sich
$g(x) = \frac{1}{x-2} - 1$

● Buch Seite 13 Nr. 14

Wie erhält man den Graphen von g aus dem Graphen von f?

a) $f(x) = x^3 + x$ und $g(x) = 2 \cdot (x^3 + x) - 1$
b) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 1)^4$ und $g(x) = x^4$

Lösungen:

a) **Der Graph von f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und dann um – 1 in y-Richtung verschoben.**
b) eigene Kommentare: Hier muss man sozusagen rückwärts denken: Wie mache ich aus a = 0,5 ein a = 1? Indem ich verdopple! Und auch bei der Verschiebung überlege ich rückwärts: Die Kurve war ursprünglich um 1 nach rechts verschoben, jetzt ist sie nicht mehr horizontal verschoben (keine Klammer mehr), also muss sie nach links gerutscht sein.
Der Graph von f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und dann um – 1 in x-Richtung verschoben.